|  |  |
| --- | --- |
|  | МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» |

Колледж СамГТУ

О.И. СИДАШ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

*Методические указания*

*к практическим занятиям для СПО*

Самара

Самарский государственный технический университет

2025

Печатается по решению методической комиссии Колледжа СамГТУ (протокол № 6 от 20.06.2025 г.).

**Составители: Сидаш О.И.**

**Математические методы решения прикладных профессиональных задач**: методические указания к практическим занятиям для СПО / *О.И. Сидаш.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2025. – 42 с.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности среднего профессионального образования 20.02.01 Экологическая безопасность природных комплексов.

Методические указания включают в себя комплект методических материалов, необходимых для успешной подготовки и участия в проведении практических занятий по дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» студентам СПО: планы практических занятий, практические задания, библиографический список литературы, перечень вопросов к экзамену.

СОДЕРЖАНИЕ

[**ВВЕДЕНИЕ** 4](#_Toc126135349)

[**ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ** 5](#_Toc126135350)

[**ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ** 31](#_Toc126135379)

[**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК** 41](#_Toc126135380)

**ВВЕДЕНИЕ**

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности Математические методы решения прикладных профессиональных задач, осваивающих дисциплину ОП.01 «Математические методы решения прикладных профессиональных задач».

Методические указания содержат практические занятия по темам дисциплины: Матрицы и определители, Системы линейных уравнений, Теория пределов, Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной, Интегральное исчисление функции одной действительной переменной, Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных, Основы теории комплексных чисел, Теория вероятностей, Элементы математической статистики.

Практическое занятие – это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися заданий самостоятельно и под руководством преподавателя. Дидактическая цель практических заданий – формирование у обучающихся профессиональных и практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений – профессиональных (выполнение определенных действия, операций, предписаний, необходимых в последующей профессиональной деятельности) или учебных (решение задач), необходимых в последующей учебной деятельности.

Наряду с формированием умений и навыков, в процессе практических занятий обобщаются, систематизируются, углубляются и конкретизируются теоретические знания, вырабатывается способность и готовность использовать знания на практике, развиваются интеллектуальные умения.

Перед тем как приступить к выполнению практического занятия, студент должен усвоить краткие теоретические сведения по теме, методику выполнения работы, а также способы представления полученных данных.

##### В методических указаниях приведены теоретические положения, практические задания, контрольные вопросы.

**ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

##### Практические занятия

**Тема.** Системы линейных алгебраических уравнений

**Тема практического занятия:**

1.Составление СЛАУ для различных производственных задач.

2. Решение СЛАУ различными методами.

**Цель практического занятия:** Определение количества решений систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений методом Крамера. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

**Краткие теоретические сведения**

1. *Решение системы линейных уравнений с помощью медода Крамера*





.

; ; .

1) . Получаем формулы Крамера.

; ; .

***Пример 1:***

Решить систему методом Крамера.



1.  Решение существует.

2. .

3. .

4. ; .

***Пример 2:***

Решить систему 

Вычислим определитель системы:

.

Так как **Δ =** -8 ≠ 0, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:



Для этого вычислим определители **Δ**1, **Δ**2и **Δ**3:



Следовательно, 

*2. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы*

Рассмотрим систему *n* линейных уравнений с *n* неизвестными:

. (1)

Матрица системы данной системы уравнений имеет вид

,

и, следовательно, данную систему уравнений можно записать в матричной форме:



или  (2)

где  и  - матрицы - столбцы неизвестных и свободных членов.

Если матрица  - невырожденная, т.е. её определитель, а следовательно, и определитель системы уравнений (1), отличен от нуля , то матрица  имеет обратную матрицу . Тогда, умножая обе части уравнения (2) на матрицу  слева, получим решение системы уравнений (1) в матричном виде:



Или . (3)

***Пример 3:***

Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:



Запишем данную систему уравнений в матричной форме  или



Вычислим определитель матрицы :

.

Т.к. , следовательно, матрица  - невырожденная и имеет обратную. Найдем матрицу, обратную матрице :

.

Тогда решение исходной системы уравнений найдем по формуле (3):

.

***Проверка***

Проверим правильность решения, подставив найденные значения неизвестных  в исходную систему уравнений.



Т.к. уравнения данной системы при подстановке найденных значений обратились в тождества, следовательно,  - решение исходной системы уравнений.

**3.** *Решение систем линейных уравнений Методом Гаусса*

Рассмотрим систему *m* линейных уравнений с *n* неизвестными:

 (1)

Метод Гаусса основан на последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований системы уравнений.

***Элементарными преобразованиями системы*** называются следующие преобразования:

1. умножение обеих частей одного из уравнений на какое-либо число λ ≠ 0;
2. перестановка любых двух уравнений;
3. прибавление к обеим частям одного из уравнений соответствующих частей любого другого уравнения, умноженного на произвольное число α.

С помощью элементарных преобразований исходная линейная система уравнений (1) может быть преобразована в линейную систему уравнений ступенчатого вида, ***эквивалентную*** данной, и все решения могут быть найдены последовательно, начиная с последнего уравнения.

В алгоритме Гаусса все преобразования производятся непосредственно над уравнениями системы. Однако этот алгоритм можно существенно упростить, если соответствующие элементарные преобразования осуществлять над строками расширенной матрицы системы.

***Матрицей системы*** уравнений (1) называется матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных

.

***Расширенной матрицей*** системы уравнений (1) называется матрица, получаемая из матрицы системы путем добавления столбца свободных членов:

.

Очевидно, что каждому элементарному преобразованию системы уравнений (1) соответствует аналогичное элементарное преобразование над строками матрицы . Следовательно, в алгоритме Гаусса можно от элементарных преобразований над системой (1) перейти к соответствующим элементарным преобразованиям над строками расширенной матрицы системы . Подобный переход позволяет сформулировать условие совместности системы в терминах ее коэффициентов и свободных членов, а в случае существования решения – получить соотношения, определяющие его.

Критерий совместности системы уравнений (1) сформулирован в теореме Кронекера-Капелли.

***Теорема Кронекера-Капелли*** утверждает, что если

1) система имеет единственное решение (определенна);

2) система имеет бесконечное множество решений (неопределенна);

3) система не имеет решений (несовместна).

***Пример 4:***

Решить систему уравнений методом Гаусса:



С помощью элементарных преобразований преобразуем данную систему уравнений к ступенчатому виду. Исключим *х*1 из второго и третьего уравнений системы. Для этого умножим первое уравнение системы на 4 и вычтем из второго, а затем умножим на 5 и вычтем из третьего. Получим систему линейных уравнений, эквивалентную данной, в виде



Далее разделим второе уравнение системы на (-5), а третье умножим на (-1). Система примет вид



Исключим теперь *х*2 из последнего уравнения, умножив второе уравнение системы на (-11) и сложив его с третьим:



Из последнего уравнения определяем *х*3 = 3. Поставив найденное значение *х*3 во второе уравнение, получим *х*2 = 2. Зная *х*2 и *х*3, можно из первого уравнения системы определить *х*1 = 1.

Очевидно, что операции над уравнениями системы аналогичны операциям над строками ее расширенной матрицы.

В данной системе число уравнений *m* = 3 и число неизвестных *n* = 3.

Составим матрицу системы и ее расширенную матрицу:

 и .

Определим ранги этих матриц. В расширенной матрице  пунктирной чертой отделим столбец свободных членов, чтобы отдельно можно было видеть и преобразование матрицы . Посредством последовательных элементарных преобразований над строками расширенной матрицы системы получим следующую систему эквивалентных матриц:

. (2)

Полученная в результате элементарных преобразований ступенчатая матрица имеет три ненулевые строки, а значит, ее ранг равен *r*=3. Следовательно, и ранг расширенной матрицы *r(A′)* = 3. Очевидно, что матрица системы также имеет три ненулевые строки, а значит, и ее ранг также равен *r(А)*=3.

Так как *r(A)* = *r(A′) = n* = 3, то в соответствии с теоремой Кронекера - Капелли система совместна и имеет единственное решение.

Полученной в результате элементарных преобразований ступенчатой матрице (2) соответствует система уравнений



которая уже была получена в результате элементарных преобразований исходной системы уравнений.

Из последнего уравнения определяем *х*3 = 3. Поставив найденное значение *х*3 во второе уравнение, получим *х*2 = 2. Зная *х*2 и *х*3, можно из первого уравнения системы определить *х*1 = 1.

***Ответ:*** *х*1 = 1; *х*2 = 2; *х*3 = 3.

**Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры**

***Вариант 1***

1.Решить систему уравнений методом Крамера:

****

2. Решить систему уравнений методом Гаусса:



***Вариант 2***

1.Решить систему уравнений методом Крамера:

****

2. Решить систему уравнений методом Гаусса:



***Вариант 3***

1.Решить систему уравнений методом Крамера:

****

2. Решить систему уравнений методом Гаусса:



***Вариант 4***

1.Решить систему уравнений методом Крамера:

****

2. Решить систему уравнений методом Гаусса:



***Вариант 5***

1.Решить систему уравнений методом Крамера:

****

2. Решить систему уравнений методом Гаусса:



***Вариант 6***

1.Решить систему уравнений методом Крамера:

****

2. Решить систему уравнений методом Гаусса:



***Вариант 7***

1.Решить систему уравнений методом Крамера:

****

2. Решить систему уравнений методом Гаусса:



***Вариант 8***

1.Решить систему уравнений методом Крамера:

****

2. Решить систему уравнений методом Гаусса:



***Контрольные вопросы***

1. Понятие СЛАУ.
2. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений.
3. Элементарные системы линейных алгебраических уравнений.
4. Системы линейных алгебраических уравнений общего вида.
5. Правило Крамера.
6. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.
7. Метод исключения неизвестных – метод Гаусса

**Тема.** Дифференциальное исчисление

**Тема практического занятия:**

1. Дифференцирование сложных функций.
2. Решение прикладных задач с помощью производной и дифференциала.

**Цель практического занятия:** познакомить студентов с дифференцируемостью функции нескольких переменных, производными высших порядков и дифференциалами высших порядков, с дифференцированием сложных функций.

**Краткие теоретические сведения**

Пусть для функции ** найдена производная , причём в результате получилась снова дифференцируемая функция. Если к ней применить оператор дифференцирования ещё раз, т.е. найти производную от первой производной , то получится *производная второго порядка*первоначальной функции



Аналогично вводятся производные третьего и последующего порядков



Множество всех функций, имеющих непрерывные производные на интервале  до  порядка включительно, обозначают через .

***Пример 1:*** 

, ,  , 



Рассмотрим 

Если рассмотреть  и т.д., т.е. производные высших порядков от произведения двух функций будут иметь структуру, соответствующую формуле Ньютона.

По индукции можно показать



Эта формула называется *формулой Лейбница.*

***Пример 2*:**  найти 



Рассмотрим теперь дифференциалы высших порядков:



Этот дифференциал представляет собой функцию двух переменных .

Если считать , то  будет зависеть только от *х*. Поэтому можно ввести понятие дифференциала второго порядка:



найдем выражение для него





Аналогично





Учитывая последнюю формулу можно так обозначать производную высших порядков



Производная n-го порядка равна дифференциалу. n-го порядка заданной функции разделённую на  в степени n

***Частные производные и полные дифференциалы высших порядков***

Для числовой функции двух переменных



частные производные высших порядков вводятся аналогично тому, как это сделано для функции одной переменной.



Смешанные частные производные

***Пример 3:***







В приведённом примере оказалось, что:



такое совпадение не является случайностью: можно строго доказать, что операторы дифференцирования по различным переменным являются коммутативными.

Поэтому, пример:



Полный дифференциал



очевидно зависит от  Однако, если зафиксировать , то нетрудно ввести дифференциал второго порядка.



Нетрудно показать, что:



**Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры**

**Вариант 1**

1. Найти частные производные от функций

.

1. Найти полные дифференциалы функций .
2. Найти производную  сложной функции ,

где , .

, , .

**Вариант 2**

1. Найти частные производные от функций

.

1. Найти полные дифференциалы функций .
2. Найти производную  сложной функции ,

где , .

, , .

**Вариант 3**

1. Найти частные производные от функций

.

1. Найти полные дифференциалы функций .
2. Найти производную  сложной функции ,

где , .

, , .

**Вариант 4**

1. Найти частные производные от функций

.

1. Найти полные дифференциалы функций .
2. Найти производную  сложной функции ,

где , .

, , .

**Вариант 5**

1. Найти частные производные от функций

.

1. Найти полные дифференциалы функций: .
2. Найти производную  сложной функции ,

где , .

, , .

**Вариант 6**

1. Найти частные производные от функций

.

1. Найти полные дифференциалы функций .
2. Найти производную  сложной функции ,

где , .

, , .

**Вариант 7**

1. Найти частные производные от функций

.

1. Найти полные дифференциалы функций .
2. Найти производную  сложной функции ,

где , .

, , .

**Вариант 8**

1. Найти частные производные от функций

.

1. Найти полные дифференциалы функций .
2. Найти производную  сложной функции ,

где , .

, , .

**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение производной функции.
2. Сформулируйте теорему о производной постоянной функции.
3. Сформулируйте теорему о производной суммы (разности) функций.
4. Сформулируйте теорему о производной произведения функций.
5. Сформулируйте теорему о производной отношения функций.
6. Сформулируйте следствие из теоремы о производной произведения функций.
7. Как называется операция взятия производной функции.
8. Дайте определение сложной функции.
9. Сформулируйте правило нахождения производной сложной функции.
10. Напишите все формулы дифференцирования функций.
11. В чем состоит физический смысл второй производной функции?
12. Запишите формулы нахождения производных степенной и показательной функций.
13. Дайте определение второй производной функции.

**Тема. Интегральное исчисление.**

**Тема практического занятия:**

1. Решение прикладных задач с помощью интеграла.
2. Интегрирование функций.
3. Приближенное вычисление определенного интеграла по формуле прямоугольников

**Цель практического занятия:** познакомить студентов с интегралами и их свойствами. Научиться применять интегральное исчисление к решению прикладных задач.

**Краткие теоретические сведения**

На плоскости  рассмотрим замкнутую область . Пусть в  задана функция . Разобьем область  на  элементарных областей , площади которых 

*Двойным интегралом* функции , по области  называется предел –ной интегральной суммы:

, (1)

где – диаметр 

Область  *называется правильной в направлении оси* , если

всякая прямая, параллельная оси , проведенная через внутреннюю точку области , пересекает границу области  ровно в двух точках. Нижнюю из них будем называть *точкой входа*, а верхнюю – *точкой выхода*. Аналогично определяется область, правильная в направлении оси 

Область, правильная в направлении обеих осей, называется *правильной*.

*Вычисление двойного интеграла* сводится к последовательному вычислению двух обыкновенных (однократных) интегралов. Если область , правильная в направлении оси  проецируется на ось  в отрезок , а ее граница разбивается на две линии, задаваемыми уравнениями  и  (рис. 1), тогда

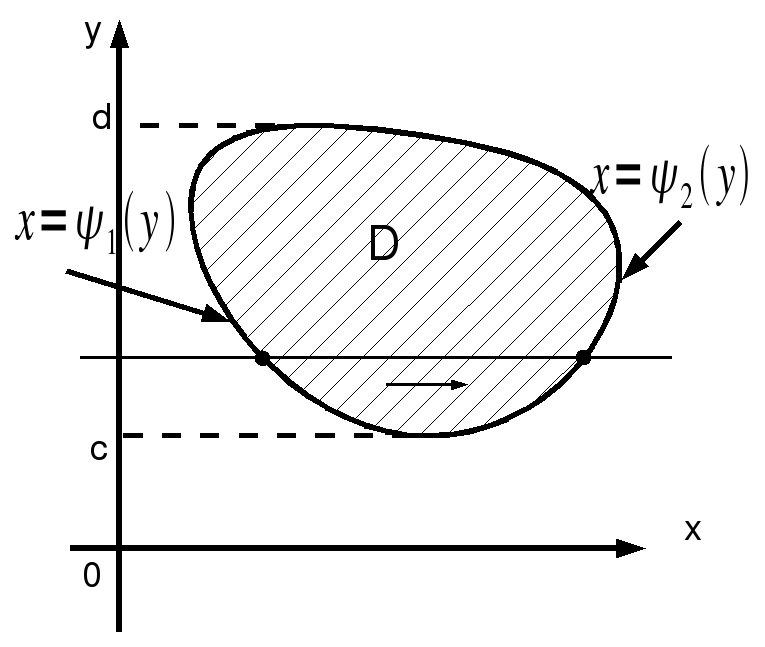


Рис. 2

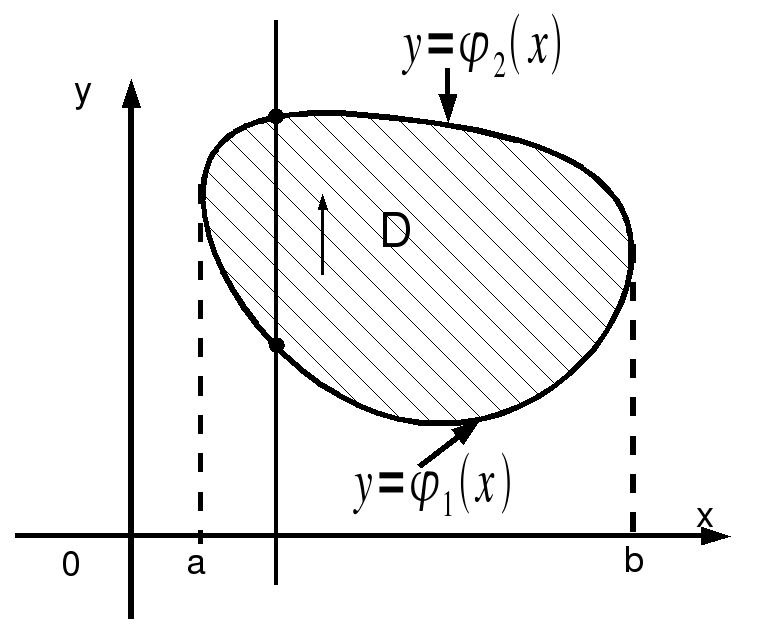


Рис. 1

 (2)

Здесь интеграл  называется внутренним. При его вычислении в подынтегральной функции  нужно  рассматривать как величину постоянную.

Если область , правильная в направлении оси  проецируется на ось  в отрезок , а ее граница разбивается на две линии, задаваемыми уравнениями  и  (рис. 2), тогда

 (3)

Здесь при вычислении внутреннего интеграла  в подынтегральной функции  нужно  рассматривать как величину постоянную.

Выражения, стоящие в правых частях равенств (2) и (3), называются *повторными* или *двукратными* интегралами. Из этих равенств следует, что

 (4)

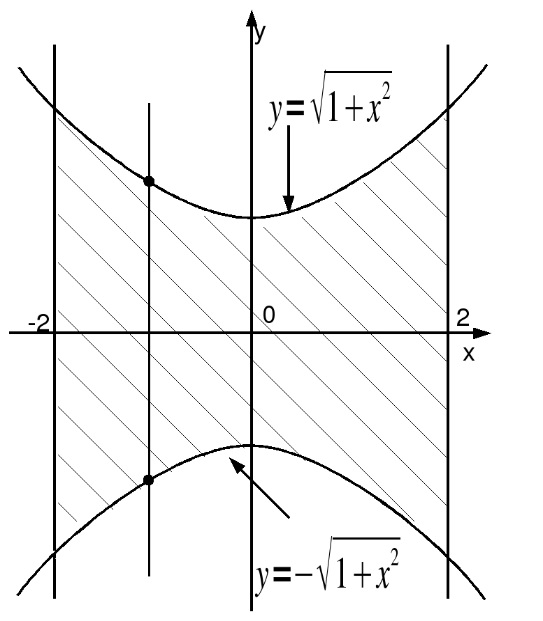
Переход от левой части равенства (4) к правой его части или от правой части к левой называется *изменением порядка интегрирования* в повторном интеграле.

*Замечание.* Если область  – неправильная, то ее нужно разбить на правильные области, и двойной интеграл по области  будет суммой двойных интегралов по этим областям.

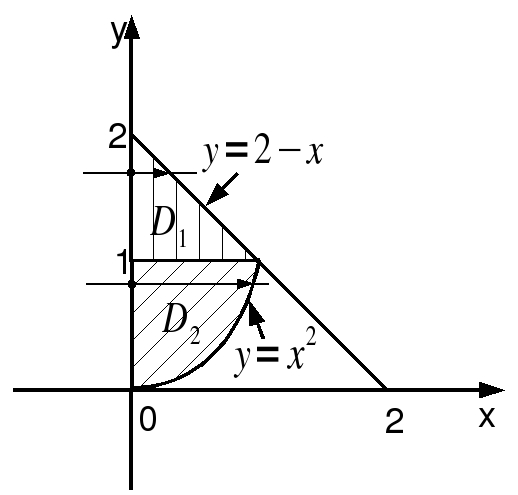
***Пример 1:***

Вычислить:

***Пример* 2:** Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле  если область  содержит начало координат, ограничена гиперболой  и двумя прямыми  и .

Область интегрирования  изображена на рис. Она правильная в направлении оси  Здесь  это нижний и верхний предел изменения переменной  во внешнем интеграле. Теперь через произвольную точку отрезка  оси  проведем прямую, параллельную оси  Нижняя граница области, которую пересечет эта прямая в точке A (точке входа), имеет уравнение  это будет нижний предел интегрирования внутреннего интеграла, а верхняя граница области, которую пересечет эта прямая в точке B (точке выхода) –  это и будет верхний предел интегрирования внутреннего интеграла. Тогда 

***Пример 3****:*Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле 

*.*Область интегрирования  ограничена линиями   .

Правый участок границы области  задан двумя линиями. Прямая  разбивает ее на две правильные области  и



В результате получаем



*Приложения двойных интегралов:*

*1. Вычисление площадей плоских фигур.**Площадь*  *плоской области* , расположенной в плоскости выражается формулой



В полярных координатах 

*2. Объем * цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью  снизу плоскостью  и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости  область  равен



*3. Вычисление площадей поверхностей.* Площадь  гладкой поверхности  выражается интегралом



где  – проекция данной поверхности на плоскость .

*4. Центр тяжести плоской пластины.* Координаты центра тяжести  пластины, лежащей в плоскости  вычисляются по формулам





где  – плотность пластины, а  – масса пластины.

**Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры**

1. Изменить порядок интегрирования .

2. Вычислить ; *D*: *x* = 1, *y* = *x*3, *y* =.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями *у*2 – 4*у* + *х*2 = 0, *у*2 – 8*у* + *х*2 = 0, , *х* = 0.

4. Пластинка *D* задана ограничивающими ее кривыми, ρ(*х*; *у*) – поверхностная плоскость. Найти ее массу. *х* =; *у* = 0; *у*2 = 16*х* ( *у* ≥ 0); ρ(*х*; *у*) = 16*х* +

5. Вычислить момент инерции эллипса  относительно оси 0*Y*.

6. Найти координаты центра тяжести области, ограниченной линиями: *у* = *х*2, *у* = 2*х*2, *х* = 1, *х* = 2.

**Задание 1.** Поменять порядок интегрирования в повторном интеграле.

**Задание 2.** Вычислить площадь области , переходя к полярным координатам.

**Вариант 1**

1.  2.  

**Вариант 2**

1.  2.  

**Вариант 3**

1.  2.  

**Вариант 4**

1.  2.  

**Вариант 5**

1.  2.  

**Вариант 6**

1.  2.  

**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Чему равен определенный интеграл с равными пределами интегрирования?
3. Чему равен определенный интеграл от алгебраической суммы функций?
4. Что происходит при перестановке пределов интегрирования местами?
5. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.
6. Сформулируйте порядок вычисления определенного интеграла.
7. Как вычислить определенный интеграл методом подстановки?
8. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
9. Напишите формулу для определения площади плоской фигуры.
10. Напишите формулу нахождения объема тела вращения.
11. Дайте определение двойного интеграла.
12. Как изменить порядок интегрирования в двойном интеграле.
13. Свойства двойных интегралов.
14. Понятие повторного интеграла. Сведение двойных интегралов к повторным в случае областей 1 и 2 типа
15. Вычисление площади фигур с помощью двойных интегралов
16. Двойные интегралы в полярной системе координат.
17. Приложения двойного интеграла

**Тема.** Основные свойства комплексных чисел.

**Тема.** Некоторые приложения теории комплексных чисел.

**Тема практического занятия:**

1. Действия над комплексными числами в различных формах записи.

2. Применение комплексных чисел при решении задач в профессиональной деятельности.

**Цель практического занятия:** познакомить студентов с определением комплексного числа, формами записи комплексных чисел, геометрическим изображением комплексных чисел.

##### Краткие теоретические сведения

*Комплексным числом* называется выражение вида  где и – действительные числа, а *i* – мнимая единица.

Число  называется *действительной частью* комплексного числа, а число – мнимой частью. Знак «+» здесь надо понимать не как знак сложения, а как некий соединительный знак.

 это алгебраическая форма к.ч.



.

Если чисто мнимое число.

действительное число.

Над к.ч. в алгебраической форме можно производить математические операции.

1. 
2.  есть сопряженное числу .
3. 
4. Сложение .

*Пример*: 

1. Умножение 

***Пример 1*:** 

Все свойства операций сложения и умножения, такие как коммутативность, дистрибутивность и т.п. сохраняются.

1. 

***Пример****.* 

1. Каждому к.ч. можно сопоставить точку на компл. плоскости.

Эта точка будет иметь координаты (*x*, *y*)

*y*

# Re*z*



*y*

*x*

*M (x,y)*

# Im *z*

*x*

O

z = *x+iy*

•

•

•

Эта точка будет иметь координаты (*х*, *y*).

Соединив начало координат с точкой *М* получим радиус-вектор  точки *М*. Т.о. комплексное число может изображаться вектором на компл. плоскости. Тогда операциям над к.ч. будут соответствовать операции над векторами.

В полярных координатах положение т. *М*

*М* ,

тогда модуль к.ч.,

 аргумент к.ч.,

.

Это главное значение аргумента.

Все множество аргументов опишется соотношением

Arg *z*.

Нетрудно видеть:

,



Заметим: а) ,

б) arg не определен,

в) .

arg =-arg *z*.

К.ч. можно записать в тригонометрической форме

**,





Положим .

.

Получим формулу Эйлера

 .

С учетом этой формулы:

.

В тригонометрической форме





***Пример 2*:** .

Здесь *х* = 0, *у* = −2, поэтому . Определим  .

.

*Операции над комплексными числами в показательной форме*

1. 

argarg+arg.

1. 

argarg-arg.

1. 

,

arg*n* arg *z*.

Посмотрим, что происходит при извлечении корня.

,

,

arg.

В тригонометрической форме это выразится так:

.

Давая *k* значения 0,1,2, … получим *n* значений корня.

***Пример 3:*** Найти 

arg1=0









О

Z=1

ω0=1

2/3π

2/3π

ω1

ω2

***Пример 4:*** Вычислить 

-1

0

 = 64.

***Пример 5:*** Вычислить



**Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры**

**Вариант1**

1. Выполнить действия



2. Вычислить



3. Представить в показательной форме число



4. Выполните действия



5. Решить уравнение 

6. Вычислить 

**Вариант2**

1. Выполнить действия



2. Вычислить



3. Представить в показательной форме число 

4. Выполните действия

-

5. Решить уравнение 

6. Вычислить 

**Вариант3**

1. Выполнить действия



2. Вычислить



3. Представить в показательной форме число 

4. Выполните действия

+

5. Решить уравнение 

6. Вычислить 

**Вариант4**

1. Выполнить действия



2. Вычислить

-

3. Представить в показательной форме число 

4. Выполните действия



5. Решить уравнение 

6. Вычислить 

**Контрольные вопросы:**

1. Запишите алгебраическую форму комплексного числа.
2. Чему равен i2?
3. Сформулируйте правило сложения (вычитания) комплексных чисел.
4. Сформулируйте правило умножения комплексных чисел.
5. Сформулируйте правило деления комплексных чисел.
6. Сформулируйте правило возведения в степень комплексных чисел.
7. Запишите формулы степени мнимой единицы.
8. Какие числа называются сопряженными?
9. Сформулируйте свойство сопряженных чисел.
10. Геометрическая форма комплексного числа.
11. Показательная форма комплексного числа.
12. Сформулируйте правило перевода комплексных чисел из алгебраической формы в тригонометрическую и показательную формы.
13. Сформулируйте правило умножения комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.
14. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.
15. Сформулируйте правило возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.
16. Сформулируйте правило извлечения корня из комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.

**Тема.** Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

**Тема практического занятия:**

1. Решение простейших задач теории вероятностей

2. Решение производственных задач методами теории вероятностей

**Цель практического занятия:** Случайные события. Классическое определение вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

**Краткие теоретические сведения**

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности в случайных явлениях (событиях).

В отличии от события достоверного или необходимого, мы называем событие случайным, если заранее нельзя гарантировать его наступление, иначе говоря если событие характеризуется только тем, что оно возможно.

Практика показывает, что массовый процесс, состоящий из большого числа однородных случайных явлений, подчиняется определенным количественным закономерностям.

Вывод. ***Предметом изучения теории вероятностей являются количественные закономерности однородных случайных явлений массового характера.***

Опытом, или испытанием, называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление. Возможный результат опыта называется событием. Будем обозначать события заглавными буквами *A*, *B*, *C*.

События можно разделить на три вида:

- достоверное – Если оно обязательно произойдет в результате опыта (обозначается U);

- невозможное – которое заведомо не произойдет в результате опыта (обозначается V);

-случайное - которое в результате опыта может либо произойти, либо не произойти.

* События называют ***несовместными,***если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.
* События называются ***равновозможными****,* если исходя из сообра­жений симметрии появление одного из них не является более пред­почтительным, чем появление любого другого.
* События называют ***независимыми,***если появление одного из них не зависит от появления других событий в одном и том же испытании.
* Несколько событий образуют ***полную группу****,* если в результате испытания появится одно из них.

Итак, в результате опыта событие может произойти или не произойти. Возникает необходимость как-то количественно охарактеризовать степень возможности появления или не появления события в результатах опыта. Численная мера степени объективной возможности наступления события называется *вероятностью события*. Другими словами, вероятность – это число, которое характеризует степень возможности появления события.

Вероятность события *А* определяется формулой:



где *m* – число элементарных исходов, благоприятствующих, появлению события *А*,

*n –* число всех возможных элементарных исходов испытания.

Определение является классическим определением вероятности, но его следует рассматривать не как определение, а как *метод вычисления вероятностей для испытаний, сводящихся к схеме случаев*.

Т.о. *вероятностью события А* называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

***Свойства вероятности.***

**1.** Вероятность достоверного события равна единице.

**2.** Вероятность невозможного события равна нулю.

**3.** Вероятность случайного события есть положительное число, заключённое между нулём и единицей.

События, вероятность которых очень мала (близка к нулю) или очень велика (близка к единице), называются соответственно *практически невозможными* или *практически достоверными* событиями.

***Действия над событиями. Соотношение между событиями***

*Суммой* *А* + *В* *двух событий А и В* называют событие, состоящее в появлении события *А*, или события *В*, или событий *А* и *В* вместе.

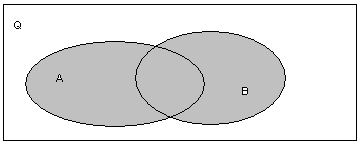
*Суммой нескольких событий* называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

*Произведением двух событий А и В* называют событие, состоящее в совместном появлении этих событий.

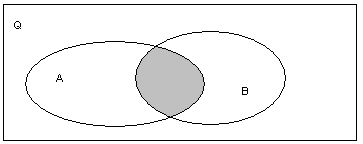
*Произведением нескольких событий* называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

События и действия над ними можно наглядно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера – Венна. Достоверное событие *Q* изображается прямоугольником; элементарные случайные события - точками прямоугольника; случайные события – областью внутри него.

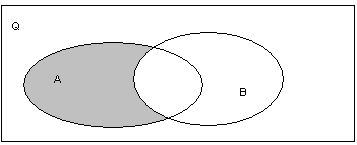
**1.** *Суммой (объединением)* событий *А* и *В* называется событие *А+В (АВ)*, которое в результате опыта имеет место, если наступит хотя бы одноиз событий *А* или *В*.



**2.** *Произведением (пересечением)* событий *А* и *В* называется событие *АВ (АВ)*, которое в результате опыта наступит, если имеют место оба события *А* и *В* вместе.

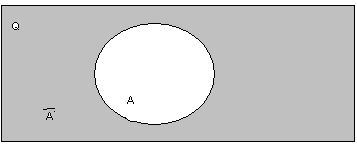
**

**3.** *Разностью А\B* *(А-В)* событий *А* и *В* называют событие, которое означает, что наступает событие *А* и не происходит событие *В.*



**4.** *Противоположным* событию *А* называется , которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие *А* (т.е.  означает, что событие *А* не наступило).

Событие  называется также *дополнением* к событию *А*, либо *отрицанием* события *А*.



***Сложение и умножение вероятностей***

События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

**Теорема сложения вероятностей для двух несовместных событий:**

*Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

*Р(А+В) = Р(А)+Р(В)*

**Теорема сложения вероятностей для двух совместных событий:**

*Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

*Р(А+В) = Р(А)+Р(В)–Р(АВ)*

*Полной группой событий* называется несколько событий таких, что в результате опыта должно произойти хотя бы одно из них.

***Замечание.*** *Сумма вероятностей событий А1, А2,…, Аn, образующих полную группу, равна единице:*

*Р(А1)+Р(А2)+…+Р(Аn) = 1*

*Противоположными* называют два единственно возможных события, образующих полную группу.

***Замечание.*** *Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице:*

*Р(А)+Р()=1*

**Теорема умножения вероятностей для независимых событий**

*Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

*Р(АВ) = Р(А)Р(В)*

*Условной вероятностью* называют вероятность события *В,* вычисленную в предположении, что событие *А* уже наступило. Обозначается или  Условная вероятность определяется формулой:

*P* .

**Теорема умножения вероятностей для зависимых событий**

*Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

*Р(АВ) = Р(А)P*

Порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, то есть безразлично какое событие считать первым, вторым и т.д.

*Р(АВ) = Р(А)* *P* *= Р(В).*

***Пример 1.*** В урне 40 шариков: 15 синих, 5 зелёных и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечён цветной шарик?

*Решение:*Введём событие *А* – «извлечён цветной шарик». Оно означает, что появился либо синий, либо зелёный шарик, тогда обозначим

*А1 –* извлечён синий шарик;

*А2 –* извлечён зелёный шарик, тогда событие *А* выразится через *А1* и *А2* следующим образом:

*А = А1 + А2*

*События А1 и А2 несовместны, следовательно*

Р(А) = Р(А1+А2) =Р(А1) + Р(А2)=

***Пример 2.*** Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадёт хотя бы один из них.

*Решение:*Введём событие *А –* «в мишень попадёт хотя бы один из спортсменов», тогда

*А1 –* «в мишень попадёт первый спортсмен»,

*А2 –* «в мишень попадёт второй спортсмен».

Событие *А* выразится через *А1* и *А2* следующим образом:

*А = А1 + А2,* причём *А1* и *А2* являются совместными, поэтому применяя теорему (3), получаем:

*Р(А) = Р(А1+А2) =Р(А1) + Р(А2) – Р(А1А2),* и так как *А1* и *А2* по условию являются независимыми событиями, то *Р(А1А2)* находим по теореме (7)

*Р(А1А2) = Р(А1) Р(А2),* в результате

*Р(А) = Р(А1) + Р(А2) – Р(А1)Р(А2) =* 0,85 + 0,8 – 0,85 0,8 = 0,97

***Пример 3*.** Из 10 карточек составлено слово «МАТЕМАТИКА». Из них школьник наудачу выбирает поочерёдно четыре карточки и приставляет одну к другой. Какова вероятность того, что получится слово «ТЕМА»?

*Решение:* Обозначим *А* – «получилось слово ТЕМА»;

- первая буква Т;

- вторая буква Е;

- третья буква М;

- четвёртая буква А.

Слово ТЕМА получится при появлении четырёх событий , ,  и , т.е.

*А* = ,

поэтому искомую вероятность найдём, применяя правило произведения вероятностей для зависимых событий:

*Р(А) = Р(А1А2А3А4) = Р(А1) РА(А2) РА(А3)РААА (А4)=*

*=.*

*Замечание:* Данную задачу можно решить с помощью классической формулы вычисления вероятностей. Число всевозможных исходов находится по формуле размещений из 10 по 4 (т.к. важен порядок выбора), а число исходов, благоприятствующих появлению слова «ТЕМА» – это произведения перестановок из двух букв Т и трёх букв А, тогда

.

***Пример 4.*** Симметричная монета подбрасывается три раза. Какова вероятность того, что цифра выпадет ровно два раза?

*Решение:*Пусть *Ак –* «выпадение цифры при *к-*ом подбрасывании монеты»,

Введём событие *А* – «выпадение двух цифр», тогда

*А = А1А23+ А12 А3 + 1 А1А3.*

*Так как события* А1А23, А12 А3 , 1 А1А3 *несовместны, а события* А1, А2 , А3 *независимы, то:*

*Р(А) =Р( А1А23+ А12 А3 + 1 А1А3) = Р( А1А23)+Р( А12 А3)+ Р(1 А1А3) =*

*= Р( А1 )Р(А2)Р(3)+ Р( А1)Р(2)Р( А3)+ Р(1)Р( А1 )Р(А3)= =*++= 

**Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний необходимо решить примеры**

1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наугад. Найти вероятность, что набранный номер верный?
2. Набирая номер телефона, абонент забыл две цифры и набрал их наугад, помня только, что они различны. Найти вероятность, что набранный номер верный?
3. В ящике 50 одинаковых деталей из них 5 окрашены. Наудачу извлекается одна деталь. Какова вероятность, что она окрашена?
4. В коробке 5 одинаковых кубиков с буквами О,П,Р,С,Т. Какова вероятность, что при вытаскивании по одному кубику и выкладывании их в ряд (в том же порядке), получится слово СПОРТ?
5. В коробке 6 одинаковых кубиков с буквами А,Т,М,Р,С,О. Какова вероятность, что при вытаскивании по одному кубику и выкладывании их в ряд (в том же порядке), получится слово ТРОС?
6. Студент знает 10 из 15 вопросов программы. Найти вероятность того, что он знает ровно 2 вопроса из 3-х ему предложенных?
7. Какова вероятность из колоды карт вынуть карту:

а) короля; б) червового короля?

1. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7?
2. В первой урне 12 шаров из них 10 белых, во второй 14 шаров из них 8 белых. Из каждой урны случайным образом достается по одному шару. Найти вероятность, что:

а) они одного цвета;

б) они разные по цвету.

1. В урне 5 белых, 9 черных и 6 красных шаров. Наудачу вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все они одного цвета.
2. Для сигнализации об аварии установлены 3 независимо работающих датчика. Вероятности того, что при аварии сработает каждый из датчиков, равны 0,4;0,8;0,5. Найти вероятность того, что при аварии:

а) сработает один датчик;

б) сработают все датчики;

в) сработают менее 2-х датчиков;

г) сработает хотя бы 2 датчика;

д) сработает хотя бы 1 датчик.

1. Устройство содержит 4 независимо работающих элемента с вероятностями отказа 0,5; 0,2; 0,3; 0,8. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

**Вариант 1.**

1. Дано шесть карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Наугад выбираются одна за другой три карточки. Найти вероятность того, что получится слово «ЛОМ».
2. Из колоды карт (их 36) вытаскивают наудачу 5 карт. Какова вероятность того, что будут вытащены 2 туза и 3 шестёрки?

**Вариант 2.**

1. На 5 карточках разрезной азбуки изображены буквы Е, Е, Л, П, П. Ребёнок случайным образом раскладывает их в ряд. Какова вероятность того, что у него получится слово ПЕПЕЛ?
2. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 50. Найти вероятность того, что среди трёх наугад выбранных вопросов студент знает два вопроса.

**Вариант 3.**

1. Абонент забыл две последние цифры телефона и помня лишь, что они различны, набрал их наугад. Найти вероятность правильного соединения.
2. В урне 3 красных и 9 синих шаров. Наугад извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что два из них красные, а 3 синие.

**Вариант 4.**

1. На полке в случайном порядке расставлены 4 книги из собрания сочинений Хемингуэя. Какова вероятность того, что они стоят в порядке возрастания номеров слева направо?
2. В партии из 100 изделий находится 5 бракованных. Для контроля было выбрано 5 изделий. Какова вероятность того, что среди них будет два бракованных?

**Контрольные вопросы:**

1. Статистическое и классическое определение вероятности.
2. События и их вероятности.
3. Теоремы сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.
4. Теоремы умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.

**Тема.** Случайная величина, ее функция распределения. Математическое ожидание случайной величины.

Решение простейших задач математической статистики.

**Краткие теоретические сведения**

***Понятия случайной величины.***

*Случайной* называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, неизвестное заранее какое именно.

Будем обозначать случайные величины прописными буквами *X*, *Y*, *Z*, и их возможные значения – соответствующими строчным буквами – *x*, *y*, *z*.

***Дискретная случайная величина***

*Дискретной*называют случайную величину, которая принимает отдельные, возможные значения с определенной вероятностью. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

***Пример 1.***

1). Число появлений герба при трех бросаниях монеты: возможно 0; 1; 2; 3

2). Число самолетов, сбитых в воздушном бою: 0; 1; 2; …. *N*, где *N* – общее число самолетов.

*Непрерывной*называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

***Пример 2.***

1) Абсцисса точки попадания при выстреле.

2) Время безотказной работы лампы.

***Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины***

*Законом распределения дискретной случайной величины* называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Способы задания: таблично, аналитически, графически.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1). | *X* | *x*1 | *x*2 | … | *xn* | - возможные значения |
|  | P | *p*1 | *p*2 | … | *pn* | - вероятность возможных значений |

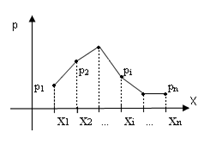
События *x*1, *x*2, …, *xn* – образуют полную группу, т.е. *р*1 + *р*2 + … + *рn* = 1.

Такую таблицу называют *рядом распределения* случайной величины *X*.

2). Графическое изображение.

В прямоугольной системе координат строят ломаную, соединяющую последовательно точки с координатами (xi; pi), i=1,2,…n.

Такая фигура называется *многоугольником распределения*.

******

***Пример 3***.Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки.

*Решение*. Вероятность появления шестерки при одном бросании *p* = 1/6, вероятность непоявления шестерки *q* = 1 – *p* = 5/6.

При трех бросаниях игральной кости шестерка может появиться либо 3 раза, либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения *X* таковы: *x*1 = 0, *x*2 = 1, *x*3 = 2, *x*4 = 3. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли: .

,

,

,

.

Искомый закон распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *x*1 | *x*2 | *x*2 | *x*3 |
| P |  |  |  |  |

***Числовые характеристики дискретных случайных величин***

*Математическим ожиданием дискретной случайной величины*называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина *X* задана законом распределения вероятностей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *x*1 | *x*2 | … | *xn* |
| *P* | *p*1 | *p*2 | … | *pn* |

Тогда математическое ожидание *M*(*X*) определяется равенством

*M*(*X*) = *x*1*p*1 + *x*2*p*2 + … + *xnpn*.

Математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная величина (постоянная).

*Математическое ожидание*приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины:

.

На числовой оси возможные значения расположены слева и справа от математического ожидания. Поэтому его часто называют *центром распределения.*

*Математическое ожидание служит характеристикой среднего значения случайной величины.*

*Дисперсией D(X)* случайной величины Х называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

D(X)=M(X-M(X))2

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться формулой:

D(X)=M(X2)-(M(X))2,

Дисперсия служит для характеристики степени рассеивания возможных значений дискретной случайной величины вокруг ее среднего значения.

Дисперсия D(X) имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому в качестве показателя рассеяния возможных значений случайной величины используют также величину *среднее квадратическое отклонение*.

*Средним квадратическим отклонением* случайной величины *Х* называют квадратный корень из дисперсии:

****

размерность *σ*(*X*) совпадает с размерностью *Х*.

***Определение функции распределения***

*Функцией распределения* называют функцию *F*(*х*), определяющую вероятность того, что случайная величина *Х* в результате испытания примет значение, меньше *x*, т.е.

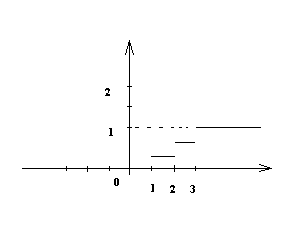
*F*(*x*) = *P*(*X* < *x*).

Геометрически: *F*(*x*) есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки *x*.

Иногда вместо термина "Функция распределения" используют термин "Интегральная функция".

График функции распределения дискретной случайной величины *X*, возможные значения которой заданы таблицей

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | 3 |
| *P* | 0,3 | 0,3 | 0,4 |



***Пример 4.*** Дискретная случайная величина Х задана законом распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| р | 0,1 | Р2 | 0,3 | 0,2 | 0,3 |

Найти Р2, функцию распределения F(x) и построить ее график, а также M(X),D(X), σ(Х).

*Решение:*Так как сумма вероятностей возможных значений случайной величины Х равна 1, то Р2=1- (0,1+0,3+0,2+0,3)=0,1

Найдем функцию распределения F(х)=P(X<x).

Геометрически это равенство можно истолковать так: F(х) есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки х.

Если х≤-1, то F(х)=0, т.к. на (-∞; х) нет ни одного значения данной случайной величины;

Если -1<х≤0, то F(х)=Р(Х=-1)=0,1, т.к. в промежуток (-∞;х) попадает только одно значение x1=-1;

Если 0<х≤1, то F(х)=Р(Х=-1)+ Р(Х=0)=0,1+0,1=0,2, т.к. в промежуток

(-∞; х) попадают два значения x1=-1 и x2=0;

Если 1<х≤2, то F(х)=Р(Х=-1) + Р(Х=0)+ Р(Х=1)= 0,1+0,1+0,3=0,5, т.к. в промежуток (-∞;х) попадают три значения x1=-1, x2=0 и x3=1;

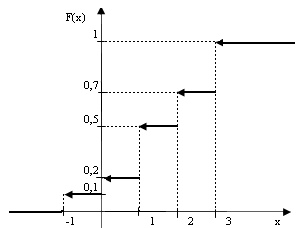
Если 2<х≤3, то F(х)=Р(Х=-1) + Р(Х=0)+ Р(Х=1)+ Р(Х=2)= 0,1+0,1+0,3+0,2=0,7, т.к. в промежуток (-∞;х) попадают четыре значения x1=-1, x2=0,x3=1 и х4=2;

Если х>3, то F(х)=Р(Х=-1) + Р(Х=0)+ Р(Х=1)+ Р(Х=2)+Р(Х=3)= 0,1+0,1+0,3+0,2+0,3=1, т.к. в промежуток (-∞;х) попадают четыре значения x1=-1, x2=0,x3=1,х4=2 и х5=3.

Итак,



Изобразим функцию F(x)графически:



Найдем числовые характеристики случайной величины:

n

М(Х)**=**∑ xκрκ =x1р1 + x2р2+…+ xnрn

κ=1

M(X)=-1•0,1+0•0,1+1•0,3+2•0,2+3•0,3=1,5

n

D(X)= ∑ x2κрκ –(M(X))2 = x21р1 + x22р2+…+ x2nрn –(M(X))2

κ=1

D(X)=(-1)2 •0,1+12•3+22•0,2+32•0,3-(1,5)2=1,65

≈1,2845.

***Непрерывная случайная величина***

*Непрерывной*называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Непрерывную случайную величину можно задавать с помощью функции распределения.

**Ф*ункцией распределения*** непрерывной случайной величины Х называется функция F(х), определяющая для каждого значения хR

вероятность того, что случайная величины Х в результате испытания примет значение, меньшее х:

F(x)=P(X<x),где хR

***Пример 1.***

1) Абсцисса точки попадания при выстреле.

2) Время безотказной работы лампы.

***Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины***

*Плотностью распределения* вероятностей непрерывной, случайной величины *Х* называют функцию *f*(*x*) – первую производную от функции распределения *F*(*x*):

*f*(*x*) = *F*′(*x*),

т.е. функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Для дискретной, случайной величины плотность распределения неприменима.

Т**еорема**. Вероятность того, что непрерывная случайная величина *Х* примет значение, принадлежащее интервалу (*a*, *b*) равна:

*P*(*a* < *x* < *b*) = .

Если *f*(*x*) - чётная функция, то *P*(- *a* < *x* < *а*) = *P*(|*x*| < *a*) .

Зная плотность распределения *f*(*x*), можно найти функцию распределения:

*F*(*x*) =.

***Свойства плотности распределения***

1) Плотность распределения неотрицательная функция: *f*(*x*) ≥ 0.

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от -∞ до +∞ равен единице:

.

3) Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (*a*, *b*) , то .

Функция *f*(*x*) определяет плотность распределения вероятности для каждой точки *Х*, аналогично плотности массы в точки.

***Числовые характеристики непрерывных случайных величин***

Математическим ожиданием непрерывной, случайной величины *X*, возможные значения которой принадлежат отрезку [*a*, *b*], называют:

*М*(*x*) = .

Если возможные значения принадлежат всей оси *Ох*, то *М*(*x*) = .

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата её отклонения:

*D*(*x*) = ; *D*(*x*) = .

***Пример 2.*** Непрерывная случайная величина задана функцией

 . Найти .

***Решение.*** Найдем сначала плотность распределения  (формула (11)):

.

Применяя формулы (14), (15) и (17), получим

;

;

.

**Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры**

***Дискретная случайная величина***

1. Дискретная случайная величина Х задана законом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| х | -2 | 0 | 2 | 5 |
| р | 0,3 | 0,2 | Р3 | 0,1 |

Найти р3, функцию распределения F(X) и построить ее график, а также M(X),D(X), σ(Х).

2.В коробке 9 фломастеров, из которых 2 фломастера уже не пишут. Наудачу берут 3 фломастера. Случайная величина Х- число пишущих фломастеров среди взятых. Составить закон распределения случайной величины.

3. В билете две задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй-0,7. Случайная величина Х- число правильно решенных задач в билете. Составить закон распределения, вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, а также найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

4. Дискретная случайная величина Х задана законом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 2 | 4 | 8 | 10 |
| р | 0,4 | 0,2 | 0,1 | 0,3 |

Построить полигон. Найти М(Х), D(X), σ(х), Мо. Построить график функции Ғ(х).

5. Дискретная случайная величина Х задана законом распределения:

 Найти D(X), если М(Х)=3,2.

6. В среднем 3/5 всего числа изделий фабрики 1 сорта. Найти наивероятнейшее число изделий 1 сорта в партии из 200 изделий.

7. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить ряд распределения случайной величины Х – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения Ғ(х) и построить ее график. Найти числовые характеристики М(Х), D(X), σ(х), Мо. Найти вероятность Р(Х>2).

8. В одном ящике имеется 3 белых и 9 черных, в другом 8 белых и 4 черных шаров. Из каждого ящика вынули по одному шару. Составить ряд распределения случайной величины Х – числа белых шаров в паре.

9. В результате обследования были выделены семьи, имеющие по 4 ребенка. Считая вероятность появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней: 1) одного мальчика; 2) трех мальчиков.

10. Случайная величина Х – число появлений события А в n испытаниях распределена по биномиальному закону с М(Х)=6, D(X)=2. Найти вероятность появления события А в каждом испытании.

***Непрерывная случайная величина***

1. Найти а, М(Х), D(X), . Построить графики функций  и .

**2.** Задана плотность распределения непрерывной случайной величины Х:

 Найти М(Х).

3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

. Найти начальный момент третьего порядка .

4. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины Х:

 Найти дисперсию D(X), если М(Х)=.

5. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины Х:

. Найти .

**Контрольные вопросы:**

1. Непрерывные случайные величины.
2. Числовые характеристики.
3. Дифференциальная и интегральная функции распределения.

**ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ**

1. Понятие матрицы, виды матриц. Сложение, умножение матриц, умножение матриц на число. Элементарные преобразования матриц
2. Понятие определителя. Определители 2-го и 3-го порядка. Вычисление определителей 2-го порядка. Правило треугольников для вычисления определителей 3-го порядка
3. Миноры и алгебраические дополнения.
4. Обратная матрица. Ранг матрицы.
5. Понятие СЛАУ. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений. Элементарные системы линейных алгебраических уравнений. Системы линейных алгебраических уравнений общего вида.
6. Правило Крамера.
7. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.
8. Метод исключения неизвестных – метод Гаусса
9. Понятие производной функции. Производные основных элементарных функций. Дифференцируемость функции. Понятие дифференциала функции
10. Правила дифференцирования: производная суммы, произведения и частного. Производная сложной функции.
11. Понятие производной n-го порядка. Понятие дифференциала n-го порядка
12. Возрастание и убывание функций. Экстремумы. Исследование функции на возрастание, убывание с помощью производной, точки максимума и минимума функции. Необходимое условие существования экстремума. Выпуклые функции. Точки перегиба. Асимптоты.
13. Схема исследования функции. Построение графиков
14. Понятие функции нескольких действительных переменных. Непрерывность функции нескольких переменных
15. Понятие частных производных. Дифференцируемость функции нескольких переменных
16. Производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких действительных переменных
17. Понятие неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования.
18. Интегрирование рациональных и иррациональных функций. Универсальная подстановка
19. Понятие определенного интеграла. Основная формула интегрального исчисления. Методы вычисления определенного интеграла
20. Приложения определенного интеграла в геометрии
21. Понятие двойного интеграла. Свойства двойных интегралов.
22. Понятие повторного интеграла. Сведение двойных интегралов к повторным в случае областей 1 и 2 типа
23. Вычисление площади фигур с помощью двойных интегралов
24. Двойные интегралы в полярной системе координат.
25. Приложения двойного интеграла
26. Статистическое и классическое определение вероятности.
27. События и их вероятности.
28. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
29. Формула полной вероятности.
30. Вероятности гипотез.
31. Дискретные случайные величины(ДСВ).
32. Числовые характеристики ДСВ.
33. Биноминальное распределение. Распределение Пуассона.
34. Непрерывные случайные величины (НСВ).
35. Числовые характеристики НСВ, дифференциальная и интегральная функции распределения.
36. Равномерное распределение. Показательное распределение, функция надежности.
37. Нормальное распределение.
38. Центральная предельная теорема Ляпунова. Теоремы Муавра-Лапласа.
39. Задачи математической статистики.
40. Эмпирическая функция распределения.
41. Полигон и гистограмма.
42. Статистические моменты.
43. Метод моментов.
44. Точечные оценки параметров распределения.
45. Интервальные оценки параметров распределения.
46. Доверительные вероятности и доверительные интервалы.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Математика: учебник для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.]; под общей редакцией О. В. Татарникова. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 450 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-9916-6372-4. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/490214>.
2. Туганбаев, А. А. Основы высшей математики. Часть 1: учебник для СПО / А. А. Туганбаев. – Санкт-Петербург: Лань, 2021. – 312 с. – ISBN 978-5-8114-6374-9. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/159503. – Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Шипачев, В.С. Основы высшей математики: учеб. пособие / Под ред. А.Н. Тихонова. - М., Высш.шк., 1989.- 479 с.
4. Математика: учебник для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.]; под общей редакцией О. В. Татарникова. – Москва: Издательство Юрайт, 2024. – 450 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-9916-6372-4. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/537192.
5. Баврин, И. И.  Математика для технических колледжей и техникумов: учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 397 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-08026-1. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/490876.
6. Баврин, И. И.  Математический анализ: учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 327 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-9916-6247-5. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/482659.
7. Маликова, Т. Е. Математические методы и модели в управлении на морском транспорте: учебное пособие для вузов / Т. Е. Маликова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 373 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-04919-0. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/473032>.